Appunti di Analisi Matematica

Gabriel Rovesti

21 aprile 2025

Indice

Capitolo 1

Elementi introduttivi

1.1 Numeri razionali

Definizione 1.1. *I numeri razionali formano l'insieme* $\mathbb{Q}$ *definito come:*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\} \tag{1.1}$$

Proprietà 1.2 (Proprietà di densità dei razionali)**.** *Dati due numeri razionali* $a, b \in \mathbb{Q}$ *con* $a < b$*, esiste sempre un numero razionale* $c \in \mathbb{Q}$ *tale che* $a < c < b$*.*

Dimostrazione. Dato $a, b \in \mathbb{Q}$ con $a < b$, possiamo considerare $c = \frac{a+b}{2}$. Poiché $\mathbb{Q}$ è chiuso rispetto alle operazioni di somma e divisione per un numero intero non nullo, abbiamo che $c \in \mathbb{Q}$. Inoltre, è immediato verificare che $a < c < b$, infatti:

$$a < c \iff a < \frac{a+b}{2} \iff 2a < a + b \iff a < b \tag{1.2}$$

$$c < b \iff \frac{a+b}{2} < b \iff a + b < 2b \iff a < b \tag{1.3}$$

Entrambe le disuguaglianze sono vere per ipotesi, quindi $a < c < b$. □

Teorema 1.3 (Irrazionalità di $\sqrt{2}$)**.** *Non esiste alcun numero razionale* $r \in \mathbb{Q}$ *tale che* $r^2 = 2$*.*

Dimostrazione. Procediamo per assurdo. Supponiamo che esista $r \in \mathbb{Q}$ tale che $r^2 = 2$. Allora esitono $p, q \in \mathbb{Z}$ con $q \neq 0$ e $\mathrm{MCD}(p, q) = 1$ (ovvero p e q sono coprimi) tali che $r = \frac{p}{q}$.

Sostituendo otteniamo:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \iff \frac{p^2}{q^2} = 2 \iff p^2 = 2q^2 \tag{1.4}$$

Da $p^2 = 2q^2$ deduciamo che p^2 è pari, e quindi anche p è pari (poiché il quadrato di un numero dispari è sempre dispari). Quindi esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $p = 2k$.

Sostituendo:

$$(2k)^2 = 2q^2 \iff 4k^2 = 2q^2 \iff 2k^2 = q^2 \tag{1.5}$$

Quindi q^2 è pari, e di conseguenza anche q è pari. Ma questo contraddice l'ipotesi che p e q siano coprimi (poiché avrebbero 2 come divisore comune).

Questa contraddizione dimostra che non può esistere un numero razionale il cui quadrato è 2. □

1.2 Numeri reali

Definizione 1.4. *I numeri reali formano l'insieme $\mathbb{R}$, che può essere definito come il completamento metrico di $\mathbb{Q}$ rispetto alla distanza euclidea.*

Teorema 1.5 (Teorema di completezza)**.** *Ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ superiormente limitato ammette un estremo superiore in $\mathbb{R}$.*

Definizione 1.6. *Un intervallo in $\mathbb{R}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ della forma:*

- *Intervallo chiuso:* $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
- *Intervallo aperto:* $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- *Intervallo semiaperto a destra:* $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- *Intervallo semiaperto a sinistra:* $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

Definizione 1.7. *La retta reale estesa si ottiene aggiungendo a $\mathbb{R}$ i simboli $-\infty$ e $+\infty$, e viene indicata con $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ o $\overline{\mathbb{R}}$.*

Definizione 1.8. *Il modulo o valore assoluto di un numero reale $x \in \mathbb{R}$ è definito come:*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

Proprietà 1.9 (Disuguaglianza triangolare)**.** *Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ vale:*

$$|x + y| \leq |x| + |y| \tag{1.7}$$

Dimostrazione. Abbiamo:

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y| \tag{1.8}$$

Da cui segue immediatamente che $|x + y| \leq |x| + |y|$. □

Definizione 1.10. *Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice:*

- *Limitato superiormente se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq M$ per ogni $x \in A$. In tal caso M si dice maggiorante di A.*
- *Limitato inferiormente se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $m \leq x$ per ogni $x \in A$. In tal caso m si dice minorante di A.*
- *Limitato se è sia limitato superiormente che inferiormente.*

Definizione 1.11. *Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$:*

- *Si dice massimo di A, e si indica con $\max A$, un elemento $M \in A$ tale che $x \leq M$ per ogni $x \in A$.*
- *Si dice minimo di A, e si indica con $\min A$, un elemento $m \in A$ tale che $m \leq x$ per ogni $x \in A$.*

Definizione 1.12. *Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$:*

- *Si dice estremo superiore di A, e si indica con $\sup A$, il più piccolo dei maggioranti di A.*
- *Si dice estremo inferiore di A, e si indica con $\inf A$, il più grande dei minoranti di A.*

Teorema 1.13 (Caratterizzazione dell'estremo superiore). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto limitato superiormente. Un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di A se e solo se:*

1. *$x \leq \alpha$ per ogni $x \in A$ (cioè α è un maggiorante di A)*
2. *Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x \in A$ tale che $x > \alpha - \varepsilon$ (cioè α è il più piccolo maggiorante)*

Proprietà 1.14 (Proprietà di Archimede). *Per ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$, esiste un numero naturale $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > x$.*

Teorema 1.15 (Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$). *Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, esiste un numero razionale $q \in \mathbb{Q}$ tale che $x < q < y$.*

1.3 Numeri complessi

Definizione 1.16. *L'unità immaginaria, indicata con i, è definita come la radice quadrata di -1, cioè un numero tale che $\mathrm{i}^2 = -1$.*

Definizione 1.17. *Un numero complesso è un'espressione della forma $z = a + b\mathrm{i}$ dove $a, b \in \mathbb{R}$. L'insieme dei numeri complessi è indicato con $\mathbb{C}$.*

Definizione 1.18. *Dato un numero complesso $z = a + b\mathrm{i}$:*

- *a è detto parte reale di z e si denota con $\Re(z)$*
- *b è detta parte immaginaria di z e si denota con $\Im(z)$*
- *Il modulo di z è definito come $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$*
- *Il coniugato di z è definito come $\overline{z} = a - b\mathrm{i}$*

Definizione 1.19. *Dati due numeri complessi $z_1 = a_1 + b_1\mathrm{i}$ e $z_2 = a_2 + b_2\mathrm{i}$, si definiscono:*

- *Somma: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathrm{i}$*
- *Sottrazione: $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\mathrm{i}$*
- *Moltiplicazione: $z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\mathrm{i}$*
- *Divisione: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\mathrm{i}$ (per $z_2 \neq 0$)*

Definizione 1.20 (Forma trigonometrica). *Ogni numero complesso $z = a + b\mathrm{i} \neq 0$ può essere scritto nella forma trigonometrica:*

$$z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \tag{1.9}$$

dove θ è l'argomento di z, ovvero l'angolo che il vettore (a, b) forma con l'asse reale positivo.

Teorema 1.21 (Moltiplicazione in forma trigonometrica). *Dati due numeri complessi $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)$ e $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$, il loro prodotto è:*

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)] \tag{1.10}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1|(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1) \cdot |z_2|(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) && (1.11)\\ &= |z_1||z_2|[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + \mathrm{i}(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)] && (1.12)\\ &= |z_1||z_2|[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)] && (1.13) \end{aligned}$$

dove abbiamo usato le formule di addizione del seno e del coseno. □

Teorema 1.22 (Divisione in forma trigonometrica). *Dati due numeri complessi* $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)$ *e* $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$ *con* $z_2 \neq 0$, *il loro quoziente è:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 - \theta_2)] \tag{1.14}$$

Teorema 1.23 (Formula di De Moivre). *Per ogni* $\theta \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{Z}$:

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta) \tag{1.15}$$

Dimostrazione. La dimostrazione procede per induzione su n.

Base: Per $n = 1$ l'uguaglianza è banalmente verificata.

Passo induttivo: Supponiamo che la formula sia vera per un certo $n \geq 1$, cioè:

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta) \tag{1.16}$$

Dobbiamo dimostrare che vale anche per $n + 1$:

$$\begin{aligned}
(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^{n+1} &= (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n \cdot (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) && (1.17)\\
&= [\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)] \cdot (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) && (1.18)\\
&= \cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta + \mathrm{i}[\sin(n\theta)\cos\theta + \cos(n\theta)\sin\theta] && (1.19)\\
&= \cos(n\theta + \theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta + \theta) && (1.20)\\
&= \cos((n+1)\theta) + \mathrm{i}\sin((n+1)\theta) && (1.21)
\end{aligned}$$

Quindi la formula è valida per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per $n = 0$ si verifica facilmente che entrambi i membri sono uguali a 1. Per $n < 0$, si utilizza la relazione:

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^{-n} = \frac{1}{(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n} = \frac{1}{\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)} = \cos(-n\theta) + \mathrm{i}\sin(-n\theta) \tag{1.22}$$

completando così la dimostrazione. □

Definizione 1.24 (Esponenziale complesso). *Per ogni* $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$, *l'esponenziale complesso è definito come:*

$$e^z = e^a(\cos b + \mathrm{i}\sin b) \tag{1.23}$$

Teorema 1.25 (Calcolo delle radici n-esime). *Le radici n-esime di un numero complesso* $z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ *sono date da:*

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right], \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{1.24}$$

1.4 Principio di induzione

Teorema 1.26 (Principio di induzione matematica - Prima forma). *Sia* $P(n)$ *una proprietà relativa ai numeri naturali. Se:*

1. $P(1)$ *è vera (base dell'induzione)*
2. *Per ogni* $k \in \mathbb{N}$, *se* $P(k)$ *è vera allora anche* $P(k+1)$ *è vera (passo induttivo)*

Allora $P(n)$ *è vera per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.27 (Principio di induzione matematica - Seconda forma). *Sia* $P(n)$ *una proprietà relativa ai numeri naturali. Se:*

1. $P(1)$ *è vera (base dell'induzione)*

2. *Per ogni $k \in \mathbb{N}$, se $P(j)$ è vera per ogni $j \leq k$, allora anche $P(k+1)$ è vera (passo induttivo)*

Allora $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.28 (Formula della somma dei primi n numeri interi positivi)**.** *Per ogni $n \in \mathbb{N}$:*

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1.25}$$

Dimostrazione. Dimostriamo la formula per induzione su n.

Base: Per $n = 1$ abbiamo:

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1 \tag{1.26}$$

Quindi la formula è vera per $n = 1$.

Passo induttivo: Supponiamo che la formula sia vera per un certo $k \in \mathbb{N}$, cioè:

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2} \tag{1.27}$$

Dobbiamo dimostrare che è vera anche per $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i &= \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) && (1.28)\\
&= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) && (1.29)\\
&= (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) && (1.30)\\
&= (k+1)\frac{k+2}{2} && (1.31)\\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} && (1.32)\\
&= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} && (1.33)
\end{aligned}$$

Quindi la formula è valida per ogni $n \in \mathbb{N}$. □

Definizione 1.29. *Il fattoriale di un numero naturale n, indicato con $n!$, è definito ricorsivamente come:*

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ n \cdot (n-1)!, & \text{se } n \geq 1 \end{cases} \tag{1.34}$$

Definizione 1.30. *I coefficienti binomiali sono definiti come:*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 0 \leq k \leq n \tag{1.35}$$

Teorema 1.31 (Formula del binomio di Newton)**.** *Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \tag{1.36}$$

Dimostrazione. Dimostriamo la formula per induzione su n.

Base: Per $n = 1$ abbiamo:

$$(a+b)^1 = a+b = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a+b \tag{1.37}$$

Quindi la formula è vera per $n = 1$.

Passo induttivo: Supponiamo che la formula sia vera per un certo $n \in \mathbb{N}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \tag{1.38}$$

Dimostriamo che è vera per $n + 1$:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\cdot(a+b)^n && (1.39)\\
&= (a+b)\cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k && (1.40)\\
&= a \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k && (1.41)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} && (1.42)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k && (1.43)\\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} && (1.44)\\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} && (1.45)\\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} && (1.46)\\
&= \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1} && (1.47)\\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k && (1.48)
\end{aligned}$$

Nell'ultima parte abbiamo usato la relazione $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$, che è la ben nota relazione ricorsiva per i coefficienti binomiali.

Quindi la formula è valida per ogni $n \in \mathbb{N}$. □

Capitolo 2

Funzioni

2.1 Definizioni fondamentali

Definizione 2.1. *Una funzione* f *da un insieme* A *a un insieme* B*, indicata con* $f : A \to B$*, è una relazione che associa a ogni elemento* $x \in A$ *uno e un solo elemento* $y \in B$*, indicato con* $f(x)$*.*

Definizione 2.2. *Il grafico di una funzione* $f : A \to B$ *è l'insieme di tutte le coppie ordinate* $(x, f(x))$ *dove* $x \in A$*:*

$$\mathit{Graf}(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\} \tag{2.1}$$

Definizione 2.3. *Data una funzione* $f : A \to B$ *e un sottoinsieme* $E \subseteq A$*, l'immagine di* E *mediante* f *è:*

$$f(E) = \{f(x) : x \in E\} \tag{2.2}$$

Analogamente, dato un sottoinsieme $F \subseteq B$*, la controimmagine di* F *mediante* f *è:*

$$f^{-1}(F) = \{x \in A : f(x) \in F\} \tag{2.3}$$

2.2 Composizione e invertibilità

Definizione 2.4. *Date due funzioni* $f : A \to B$ *e* $g : B \to C$*, la composizione di* g *con* f *è la funzione* $g \circ f : A \to C$ *definita da:*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \textit{per ogni } x \in A \tag{2.4}$$

Definizione 2.5. *Una funzione* $f : A \to B$ *si dice iniettiva se per ogni* $x_1, x_2 \in A$ *con* $x_1 \neq x_2$ *si ha* $f(x_1) \neq f(x_2)$*.*

Definizione 2.6. *Una funzione* $f : A \to B$ *si dice suriettiva se per ogni* $y \in B$ *esiste almeno un* $x \in A$ *tale che* $f(x) = y$*.*

Definizione 2.7. *Una funzione* $f : A \to B$ *si dice biiettiva se è sia iniettiva che suriettiva.*

Definizione 2.8. *Se* $f : A \to B$ *è biiettiva, allora esiste ed è unica la funzione inversa* $f^{-1} : B \to A$ *definita da:*

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y \tag{2.5}$$

2.3 Proprietà delle funzioni

Definizione 2.9. *Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$, si dice:*

- *Funzione pari se per ogni $x \in A$ si ha $-x \in A$ e $f(-x) = f(x)$*
- *Funzione dispari se per ogni $x \in A$ si ha $-x \in A$ e $f(-x) = -f(x)$*

Definizione 2.10. *Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice:*

- *Crescente se per ogni $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) < f(x_2)$*
- *Decrescente se per ogni $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) > f(x_2)$*
- *Monotona se è crescente o decrescente*

Definizione 2.11. *Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice periodica se esiste un numero $T > 0$ tale che per ogni $x \in A$ si ha $x + T \in A$ e $f(x + T) = f(x)$. Il più piccolo valore positivo di T per cui vale questa proprietà è detto periodo di f.*

2.4 Funzioni elementari

Definizione 2.12 (Funzioni trigonometriche)**.** *Le principali funzioni trigonometriche sono:*

$$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1], \quad \sin(x) = \sin(x) \tag{2.6}$$

$$\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1], \quad \cos(x) = \cos(x) \tag{2.7}$$

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \tag{2.8}$$

$$\cot : \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \tag{2.9}$$

Definizione 2.13 (Funzioni trigonometriche inverse)**.** *Le principali funzioni trigonometriche inverse sono:*

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \arcsin(y) = x \iff \sin(x) = y \tag{2.10}$$

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi], \quad \arccos(y) = x \iff \cos(x) = y \tag{2.11}$$

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \arctan(y) = x \iff \tan(x) = y \tag{2.12}$$

$$arccot : \mathbb{R} \to (0, \pi), \quad arccot(y) = x \iff \cot(x) = y \tag{2.13}$$

Definizione 2.14 (Funzioni iperboliche)**.** *Le principali funzioni iperboliche sono:*

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{2.14}$$

$$\cosh : \mathbb{R} \to [1, +\infty), \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{2.15}$$

$$\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1), \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \tag{2.16}$$

Definizione 2.15 (Funzioni iperboliche inverse)**.** *Le principali funzioni iperboliche inverse sono:*

$$arcsinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad arcsinh(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \tag{2.17}$$

$$arccosh : [1, +\infty) \to [0, +\infty), \quad arccosh(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \tag{2.18}$$

$$arctanh : (-1, 1) \to \mathbb{R}, \quad arctanh(y) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right) \tag{2.19}$$

Capitolo 3

Limiti di funzioni di una variabile reale

3.1 Topologia della retta reale

Definizione 3.1. *Dato $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, l'intorno sferico (o semplicemente intorno) di centro x_0 e raggio r è l'insieme:*

$$I_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} = (x_0 - r, x_0 + r) \tag{3.1}$$

Proprietà 3.2. *L'intersezione di due intorni di uno stesso punto è ancora un intorno di quel punto.*

Proprietà 3.3 (Proprietà di separazione)**.** *Dati due punti distinti $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, esistono due intorni I_1 di x_1 e I_2 di x_2 tali che $I_1 \cap I_2 = \emptyset$.*

Definizione 3.4. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Si dice che x_0 è:*

- *Punto di accumulazione per A se per ogni $r > 0$ l'insieme $(x_0 - r, x_0 + r) \cap (A \setminus \{x_0\})$ è non vuoto.*
- *Punto isolato di A se $x_0 \in A$ e esiste $r > 0$ tale che $(x_0 - r, x_0 + r) \cap A = \{x_0\}$.*

3.2 Limiti

Definizione 3.5. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto di accumulazione per A. Si dice che f ha limite $L \in \mathbb{R}$ per x che tende a x_0, e si scrive:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \tag{3.2}$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in A$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ si ha $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Teorema 3.6 (Teorema di unicità del limite)**.** *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e sia x_0 un punto di accumulazione per A. Se esistono $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_2$, allora $L_1 = L_2$.*

Dimostrazione. Procediamo per assurdo. Supponiamo che $L_1 \neq L_2$ e sia $\varepsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{3} > 0$.

Per la definizione di limite, esistono $\delta_1, \delta_2 > 0$ tali che:

$$\text{per ogni } x \in A \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta_1 \text{ si ha } |f(x) - L_1| < \varepsilon \tag{3.3}$$

$$\text{per ogni } x \in A \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta_2 \text{ si ha } |f(x) - L_2| < \varepsilon \tag{3.4}$$

Sia $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Per ogni $x \in A$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ valgono entrambe le disuguaglianze precedenti. Usando la disuguaglianza triangolare otteniamo:

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| && (3.5)\\ &\leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| && (3.6)\\ &< \varepsilon + \varepsilon && (3.7)\\ &= \frac{2|L_1 - L_2|}{3} && (3.8) \end{aligned}$$

Quindi $|L_1 - L_2| < \frac{2|L_1-L_2|}{3}$, che è una contraddizione poiché $|L_1 - L_2| > 0$. Pertanto deve essere $L_1 = L_2$. □

Definizione 3.7. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e sia x_0 un punto di accumulazione per A. Si definiscono:*

- *Limite destro:* $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$ *se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in A$ con $x_0 < x < x_0 + \delta$ si ha $|f(x) - L| < \varepsilon$.*
- *Limite sinistro:* $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$ *se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in A$ con $x_0 - \delta < x < x_0$ si ha $|f(x) - L| < \varepsilon$.*

Teorema 3.8. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e sia x_0 un punto di accumulazione per A. Allora* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ *se e solo se* $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$.

Teorema 3.9 (Teorema della permanenza del segno)**.** *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e sia x_0 un punto di accumulazione per A. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ e $L > 0$ (risp. $L < 0$), allora esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in A$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ si ha $f(x) > 0$ (risp. $f(x) < 0$).*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon = \frac{L}{2} > 0$ (assumendo $L > 0$). Per la definizione di limite, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in A$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ si ha $|f(x) - L| < \varepsilon = \frac{L}{2}$.

Quindi:

$$|f(x) - L| < \frac{L}{2} \iff -\frac{L}{2} < f(x) - L < \frac{L}{2} \iff \frac{L}{2} < f(x) < \frac{3L}{2} \tag{3.9}$$

In particolare, $f(x) > \frac{L}{2} > 0$ per ogni $x \in A$ con $0 < |x - x_0| < \delta$.

Il caso $L < 0$ si dimostra in modo analogo. □

Teorema 3.10 (Teorema del confronto)**.** *Siano $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ tre funzioni e sia x_0 un punto di accumulazione per A. Se esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in A$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ si ha $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, e se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$, allora anche $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$.*

Teorema 3.11 (Teorema dei due carabinieri)**.** *Siano $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ tre funzioni e sia x_0 un punto di accumulazione per A. Se esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in A$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ si ha $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, e se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$, allora anche $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$. Poiché $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$, esistono $\delta_1, \delta_2 > 0$ tali che:

$$\text{per ogni } x \in A \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta_1 \text{ si ha } |f(x) - L| < \varepsilon \tag{3.10}$$

$$\text{per ogni } x \in A \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta_2 \text{ si ha } |h(x) - L| < \varepsilon \tag{3.11}$$

Sia δ_3 il δ dell'ipotesi e sia $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Per ogni $x \in A$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ valgono tutte le disuguaglianze precedenti. Quindi:

$$f(x) < L + \varepsilon \tag{3.12}$$

$$h(x) > L - \varepsilon \tag{3.13}$$

Poiché $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, abbiamo:

$$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon \tag{3.14}$$

Quindi $|g(x) - L| < \varepsilon$ per ogni $x \in A$ con $0 < |x - x_0| < \delta$, il che prova che $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$. $\square$

Teorema 3.12 (Limite fondamentale)**.**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{3.15}$$

Teorema 3.13 (Algebra dei limiti)**.** *Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni e sia x_0 un punto di accumulazione per A. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = M$, allora:*

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M \tag{3.16}$$

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M \tag{3.17}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad \text{se } M \neq 0 \tag{3.18}$$

Definizione 3.14 (Numero di Nepero)**.** *Il numero di Nepero, denotato con e, è definito come:*

$$e = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \tag{3.19}$$

3.3 Confronto tra infiniti e infinitesimi

Definizione 3.15. *Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni e sia x_0 un punto di accumulazione per A. Si dice che:*

- *f è un infinitesimo rispetto a g per $x \to x_0$ se $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Si scrive $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$.*
- *f e g sono infinitesimi dello stesso ordine per $x \to x_0$ se $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$.*
- *f è un infinito rispetto a g per $x \to x_0$ se $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.*

Teorema 3.16 (Principio di sostituzione degli infinitesimi)**.** *Siano $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ tre funzioni e sia x_0 un punto di accumulazione per A. Se $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$ (cioè $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$) e se esiste $\lim_{x\to x_0} \frac{h(x)}{g(x)} = L$, allora esiste anche $\lim_{x\to x_0} \frac{h(x)}{f(x)} = L$.*

Dimostrazione. Osserviamo che:

$$\frac{h(x)}{f(x)} = \frac{h(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{f(x)} \tag{3.20}$$

Per ipotesi, $\lim_{x\to x_0} \frac{h(x)}{g(x)} = L$ e $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, quindi $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$. Per il teorema sul limite del prodotto:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{h(x)}{f(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{h(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = L \cdot 1 = L \tag{3.21}$$

$\square$

Capitolo 4

Successioni

4.1 Definizioni e proprietà

Definizione 4.1. *Una successione di numeri reali è una funzione* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *che associa ad ogni numero naturale* n *un numero reale* a_n. *Si indica con* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *o semplicemente* (a_n).

Definizione 4.2. *Una successione* (a_n) *si dice:*

- *Convergente a* $L \in \mathbb{R}$ *se* $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, *cioè se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tale che per ogni* $n > n_0$ *si ha* $|a_n - L| < \varepsilon$.

- *Divergente a* $+\infty$ *se* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, *cioè se per ogni* $M > 0$ *esiste* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tale che per ogni* $n > n_0$ *si ha* $a_n > M$.

- *Divergente a* $-\infty$ *se* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, *cioè se per ogni* $M < 0$ *esiste* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tale che per ogni* $n > n_0$ *si ha* $a_n < M$.

- *Indeterminata se non è né convergente né divergente.*

Teorema 4.3. *Se una successione* (a_n) *è convergente, allora è limitata, cioè esiste* $M > 0$ *tale che* $|a_n| \leq M$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.4 (Teorema della permanenza del segno)**.** *Se* $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ *e* $L > 0$ *(risp.* $L < 0$*), allora esiste* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tale che per ogni* $n > n_0$ *si ha* $a_n > 0$ *(risp.* $a_n < 0$*).*

Teorema 4.5 (Teorema del confronto)**.** *Siano* (a_n), (b_n) *e* (c_n) *tre successioni tali che* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *per ogni* n *maggiore di un certo* n_0. *Se* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, *allora anche* $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Teorema 4.6 (Teorema dei due carabinieri)**.** *Siano* (a_n), (b_n) *e* (c_n) *tre successioni tali che* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *per ogni* n *maggiore di un certo* n_0. *Se* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, *allora anche* $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Teorema 4.7 (Teorema delle successioni monotone)**.** *Sia* (a_n) *una successione monotona, cioè crescente o decrescente.*

- *Se* (a_n) *è crescente ed è superiormente limitata, allora è convergente e* $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

- *Se* (a_n) *è decrescente ed è inferiormente limitata, allora è convergente e* $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

4.2 Sottosuccessioni e criterio di Cauchy

Definizione 4.8. *Data una successione* (a_n)*, una sottosuccessione è una successione* (a_{n_k}) *dove* (n_k) *è una successione strettamente crescente di indici.*

Teorema 4.9 (Teorema di Bolzano-Weierstrass)**.** *Ogni successione limitata ammette una sottosuccessione convergente.*

Teorema 4.10 (Caratterizzazione del limite mediante sottosuccessioni)**.** *Una successione* (a_n) *converge a* L *se e solo se ogni sua sottosuccessione converge a* L*.*

Definizione 4.11 (Successione di Cauchy)**.** *Una successione* (a_n) *si dice di Cauchy se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tale che per ogni* $n, m > n_0$ *si ha* $|a_n - a_m| < \varepsilon$*.*

Teorema 4.12 (Criterio di Cauchy)**.** *Una successione è convergente se e solo se è di Cauchy.*

Teorema 4.13 (Caratterizzazione del limite di funzioni mediante successioni)**.** *Sia* $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione e sia* x_0 *un punto di accumulazione per* A*. Allora* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ *se e solo se per ogni successione* (x_n) *di elementi di* $A \setminus \{x_0\}$ *che converge a* x_0 *si ha* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$*.*

Capitolo 5

Funzioni continue di una variabile reale

5.1 Definizioni e proprietà

Definizione 5.1. *Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice continua in un punto $x_0 \in A$ se:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{5.1}$$

La funzione f si dice continua su A se è continua in ogni punto di A.

Teorema 5.2. *Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni continue in $x_0 \in A$. Allora:*

1. *$f + g$ è continua in x_0*
2. *$f \cdot g$ è continua in x_0*
3. *$\frac{f}{g}$ è continua in x_0 se $g(x_0) \neq 0$*

Teorema 5.3. *Se $f : A \to B$ è continua in $x_0 \in A$ e $g : B \to \mathbb{R}$ è continua in $f(x_0)$, allora la funzione composta $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ è continua in x_0.*

5.2 Teoremi fondamentali

Teorema 5.4 (Teorema di Weierstrass)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora f ammette massimo e minimo assoluti, cioè esistono $x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che per ogni $x \in [a, b]$ si ha:*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \tag{5.2}$$

Dimostrazione. Dimostriamo l'esistenza del massimo assoluto (per il minimo la dimostrazione è analoga).

Poiché f è continua su $[a, b]$, l'insieme $f([a, b]) = \{f(x) : x \in [a, b]\}$ è limitato. Sia $M = \sup f([a, b])$.

Per definizione di estremo superiore, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in [a, b]$ tale che:

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M \tag{5.3}$$

Abbiamo così costruito una successione (x_n) di elementi di $[a, b]$. Poiché $[a, b]$ è compatto, per il teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione (x_{n_k}) che converge a un punto $x_0 \in [a, b]$.

Per la continuità di f, abbiamo:

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) \tag{5.4}$$

D'altra parte, per costruzione:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty}\left(M - \frac{1}{n_k}\right) = M \tag{5.5}$$

Quindi $f(x_0) = M$, il che prova che M è il valore massimo di f e che è raggiunto nel punto $x_0 \in [a, b]$. □

Teorema 5.5 (Teorema di Bolzano o degli zeri)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.*

Dimostrazione. Senza perdere di generalità, supponiamo che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$.

Definiamo la successione di intervalli $[a_n, b_n]$ nel modo seguente:

- $[a_1, b_1] = [a, b]$
- Per $n \geq 1$, sia $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ il punto medio dell'intervallo $[a_n, b_n]$.
  - Se $f(c_n) = 0$, allora abbiamo trovato il punto cercato e la dimostrazione termina.
  - Se $f(c_n) < 0$, poniamo $a_{n+1} = c_n$ e $b_{n+1} = b_n$.
  - Se $f(c_n) > 0$, poniamo $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = c_n$.

Osserviamo che per costruzione:

- $a \leq a_n < b_n \leq b$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
- $f(a_n) < 0$ e $f(b_n) > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
- $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Quindi $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, il che implica che le successioni (a_n) e (b_n) convergono allo stesso limite $c \in [a, b]$.

Poiché f è continua, abbiamo:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) \tag{5.6}$$
$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c) \tag{5.7}$$

Ma sappiamo che $f(a_n) < 0$ e $f(b_n) > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi per il teorema della permanenza del segno dovremmo avere $f(c) \leq 0$ e $f(c) \geq 0$, il che è possibile solo se $f(c) = 0$. □

Teorema 5.6 (Teorema dei valori intermedi)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Se $f(a) \neq f(b)$, allora per ogni valore y compreso tra $f(a)$ e $f(b)$ esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = y$.*

Dimostrazione. Senza perdere di generalità, supponiamo che $f(a) < f(b)$ e sia $y \in (f(a), f(b))$.

Consideriamo la funzione $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = f(x) - y$. Allora:

$$g(a) = f(a) - y < 0 \tag{5.8}$$
$$g(b) = f(b) - y > 0 \tag{5.9}$$

Quindi $g(a) \cdot g(b) < 0$. Poiché g è continua (in quanto differenza di funzioni continue), per il teorema di Bolzano esiste $c \in (a, b)$ tale che $g(c) = 0$, cioè $f(c) = y$. □

Teorema 5.7 (Continuità dell'inversa)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e strettamente monotona. Allora la funzione inversa $f^{-1} : f([a, b]) \to [a, b]$ è continua.*

Capitolo 6

Calcolo differenziale per funzioni di una variabile reale

6.1 Definizione di derivata

Definizione 6.1. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in (a, b)$. La derivata di f in x_0, indicata con $f'(x_0)$, è il limite (se esiste finito):*

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{6.1}$$

Teorema 6.2. *Se una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in (a, b)$, allora è anche continua in x_0.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Osserviamo che:

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)\right] \tag{6.2}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} (x - x_0) \tag{6.3}$$

$$= f'(x_0) \cdot 0 \tag{6.4}$$

$$= 0 \tag{6.5}$$

Quindi $\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$, cioè $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, il che dimostra la continuità di f in x_0. □

Definizione 6.3. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in (a, b)$. Si definiscono:*

- *Derivata destra:* $f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
- *Derivata sinistra:* $f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Teorema 6.4. *Una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in (a, b)$ se e solo se esistono finite le derivate destra e sinistra in x_0 e sono uguali, cioè:*

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \tag{6.6}$$

In tal caso, $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

6.2 Regole di derivazione

Teorema 6.5. *Siano $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in $x_0 \in (a, b)$ e sia $c \in \mathbb{R}$ una costante. Allora:*

1. *$f + g$ è derivabile in x_0 e $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$*
2. *$c \cdot f$ è derivabile in x_0 e $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$*
3. *$f \cdot g$ è derivabile in x_0 e $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$*
4. *Se $g(x_0) \neq 0$, allora $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0 e $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$*

Teorema 6.6 (Derivata della funzione composta)**.** *Siano $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che $f((a, b)) \subseteq I$. Se f è derivabile in $x_0 \in (a, b)$ e g è derivabile in $f(x_0)$, allora la funzione composta $g \circ f$ è derivabile in x_0 e:*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \tag{6.7}$$

Teorema 6.7 (Derivata della funzione inversa)**.** *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente monotona e derivabile in $x_0 \in (a, b)$ con $f'(x_0) \neq 0$. Allora la funzione inversa f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e:*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \tag{6.8}$$

6.3 Teoremi fondamentali del calcolo differenziale

Teorema 6.8 (Teorema di Fermat)**.** *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $x_0 \in (a, b)$. Se x_0 è un punto di massimo o minimo relativo per f, allora $f'(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo che x_0 sia un punto di massimo relativo per f (il caso del minimo è analogo). Allora esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in (a, b)$ con $|x - x_0| < \delta$ si ha $f(x) \leq f(x_0)$.

Consideriamo i rapporti incrementali:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{6.9}$$

Se $h > 0$ è abbastanza piccolo, allora $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$, quindi:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \tag{6.10}$$

Passando al limite per $h \to 0^+$, otteniamo $f'_+(x_0) \leq 0$.

Analogamente, se $h < 0$ è abbastanza piccolo in valore assoluto, allora $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$, quindi:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \tag{6.11}$$

Passando al limite per $h \to 0^-$, otteniamo $f'_-(x_0) \geq 0$.

Poiché f è derivabile in x_0, si ha $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$. Dalle disuguaglianze precedenti, concludiamo che $f'(x_0) = 0$. □

Teorema 6.9 (Teorema di Rolle)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Se $f(a) = f(b)$, allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.*

Dimostrazione. Se f è costante su $[a,b]$, allora $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a,b)$ e la tesi è banalmente verificata.

Supponiamo quindi che f non sia costante su $[a,b]$. Poiché f è continua su $[a,b]$, per il teorema di Weierstrass essa ammette massimo e minimo assoluti. Dato che $f(a) = f(b)$ e f non è costante, almeno uno tra massimo e minimo deve essere assunto in un punto interno a (a,b).

Sia $c \in (a,b)$ un punto in cui f assume un massimo o un minimo relativo. Per il teorema di Fermat, si ha $f'(c) = 0$. □

Teorema 6.10 (Teorema di Lagrange)**.** *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Allora esiste almeno un punto $c \in (a,b)$ tale che:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{6.12}$$

Teorema 6.11 (Teorema di Cauchy)**.** *Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue su $[a,b]$ e derivabili in (a,b). Se $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a,b)$, allora esiste almeno un punto $c \in (a,b)$ tale che:*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \tag{6.13}$$

Teorema 6.12 (Teorema di De L'Hôpital)**.** *Siano $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili, con $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a,b)$. Supponiamo che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ oppure $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ (forma indeterminata). Se esiste $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, allora:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \tag{6.14}$$

6.4 Studio di funzione

Teorema 6.13 (Legame tra monotonia e derivata prima)**.** *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile.*

1. *Se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a,b)$, allora f è strettamente crescente su (a,b).*
2. *Se $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (a,b)$, allora f è strettamente decrescente su (a,b).*

Dimostrazione. Dimostriamo il punto 1 (il punto 2 è analogo). Siano $x_1, x_2 \in (a,b)$ con $x_1 < x_2$. Per il teorema di Lagrange, esiste $c \in (x_1, x_2)$ tale che:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{6.15}$$

Poiché $f'(c) > 0$ per ipotesi e $x_2 - x_1 > 0$, si ha:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1) > 0 \tag{6.16}$$

Quindi $f(x_2) > f(x_1)$, il che dimostra che f è strettamente crescente. □

Definizione 6.14. *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che f è:*

- *Convessa su (a,b) se per ogni $x_1, x_2 \in (a,b)$ e per ogni $t \in [0,1]$ si ha:*

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \tag{6.17}$$

- *Concava su (a,b) se per ogni $x_1, x_2 \in (a,b)$ e per ogni $t \in [0,1]$ si ha:*

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \tag{6.18}$$

Teorema 6.15 (Legame tra convessità e derivata seconda). *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione due volte derivabile.*

1. *Se $f''(x) > 0$ per ogni $x \in (a, b)$, allora f è strettamente convessa su (a, b).*
2. *Se $f''(x) < 0$ per ogni $x \in (a, b)$, allora f è strettamente concava su (a, b).*

Definizione 6.16. *Un punto $x_0 \in (a, b)$ si dice punto di flesso per una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ se f è derivabile in x_0 e se f passa da concava a convessa o viceversa in x_0.*

Teorema 6.17 (Legame tra punti di flesso e derivata seconda). *Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è due volte derivabile in $x_0 \in (a, b)$ e $f''(x_0) = 0$, e se f'' cambia segno in x_0, allora x_0 è un punto di flesso per f.*

6.5 Formula di Taylor

Teorema 6.18 (Polinomio di Taylor). *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione $n + 1$ volte derivabile in un punto $x_0 \in (a, b)$. Allora, per ogni $x \in (a, b)$, si ha:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x, x_0) \tag{6.19}$$

dove $R_n(x, x_0)$ è il resto di Lagrange:

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1} \tag{6.20}$$

con ξ un punto compreso tra x_0 e x.

Teorema 6.19 (Formula di Taylor con il resto di Peano). *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione $n + 1$ volte derivabile in un punto $x_0 \in (a, b)$. Allora, per ogni $x \in (a, b)$, si ha:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \tag{6.21}$$

dove $o((x - x_0)^n)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $(x - x_0)^n$ per $x \to x_0$.

Dimostrazione. Per induzione su n.

Base: Per $n = 0$, la formula diventa:

$$f(x) = f(x_0) + o(1) \tag{6.22}$$

che è vera per la definizione di continuità (che segue dalla derivabilità).

Passo induttivo: Supponiamo che la formula sia vera per un certo $n \geq 0$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \tag{6.23}$$

Sia $\varphi(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$. Allora:

$$\varphi(x) = o((x - x_0)^n) \tag{6.24}$$

e $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \ldots = \varphi^{(n)}(x_0) = 0$.

Consideriamo:

$$\frac{\varphi(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{o((x - x_0)^n)}{(x - x_0)^n} = o(1) \tag{6.25}$$

Per la regola di de l'Hôpital, applicata n volte:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{(x-x_0)^n}=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\varphi^{(n)}(x)=\frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{n!}=0 \tag{6.26}$$

Derivando φ otteniamo:

$$\varphi'(x)=f'(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}=f'(x)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j+1)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j \tag{6.27}$$

Per l'ipotesi induttiva applicata a f':

$$f'(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j+1)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j+o((x-x_0)^n) \tag{6.28}$$

Quindi:

$$\varphi'(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n) \tag{6.29}$$

Integrando da x_0 a x:

$$\varphi(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}+o((x-x_0)^{n+1}) \tag{6.30}$$

Sostituendo:

$$\begin{aligned}
f(x)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\varphi(x) && (6.31)\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}+o((x-x_0)^{n+1}) && (6.32)\\
&=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^{n+1}) && (6.33)
\end{aligned}$$

completando così la dimostrazione. □

Esempio 6.20 (Sviluppi di Taylor per funzioni elementari)**.**

$$\begin{aligned}
e^x&=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n) && (6.34)\\
\sin x&=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2k+1}) && (6.35)\\
\cos x&=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2k}) && (6.36)\\
\ln(1+x)&=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}+o(x^k)\quad \textit{per } |x|<1 && (6.37)\\
\arctan x&=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+o(x^{2k+1})\quad \textit{per } |x|<1 && (6.38)
\end{aligned}$$

Capitolo 7

Serie numeriche

7.1 Definizioni e proprietà

Definizione 7.1. *Data una successione* (a_n) *di numeri reali, si definisce la successione delle somme parziali* (S_n) *come:*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \tag{7.1}$$

La serie associata a (a_n) *è la successione* (S_n) *e si denota con* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definizione 7.2. *Una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *si dice:*

- *Convergente se esiste ed è finito* $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. *In tal caso,* S *si dice somma della serie.*
- *Divergente a* $+\infty$ *se* $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$.
- *Divergente a* $-\infty$ *se* $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$.
- *Indeterminata se* $\lim_{n\to\infty} S_n$ *non esiste.*

Definizione 7.3. *Data una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *con somme parziali* (S_n), *si definisce il resto n-esimo come:*

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \tag{7.2}$$

dove S *è la somma della serie (se convergente).*

7.2 Serie geometrica

Teorema 7.4 (Serie geometrica)**.** *La serie geometrica* $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ *è:*

- *Convergente a* $\frac{1}{1-q}$ *se* $|q| < 1$.
- *Divergente se* $|q| \geq 1$.

Continuazione della dimostrazione del Teorema sulla serie geometrica. Le somme parziali della serie geometrica sono:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n \tag{7.3}$$

Moltiplicando entrambi i membri per q otteniamo:

$$q \cdot S_n = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n+1} \tag{7.4}$$

Sottraendo membro a membro:

$$S_n - q \cdot S_n = 1 - q^{n+1} \tag{7.5}$$
$$S_n(1-q) = 1 - q^{n+1} \tag{7.6}$$
$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \tag{7.7}$$

Se $|q| < 1$, allora $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$, quindi:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q} \tag{7.8}$$

Se $q = 1$, allora $S_n = n + 1 \to \infty$ per $n \to \infty$, quindi la serie diverge.

Se $q > 1$, allora $q^{n+1} \to \infty$ per $n \to \infty$, quindi la serie diverge.

Se $q = -1$, allora $S_n = \frac{1-(-1)^{n+1}}{2}$ che non ha limite per $n \to \infty$, quindi la serie è indeterminata.

Se $q < -1$, allora $|q^{n+1}| \to \infty$ per $n \to \infty$ e q^{n+1} cambia di segno ad ogni incremento di n, quindi la serie è indeterminata. □

7.3 Criteri di convergenza

Teorema 7.5 (Condizione necessaria per la convergenza)**.** *Se la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *è convergente, allora* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dimostrazione. Sia $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ la somma della serie. Allora:

$$a_n = S_n - S_{n-1} \tag{7.9}$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) \tag{7.10}$$
$$= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} \tag{7.11}$$
$$= S - S \tag{7.12}$$
$$= 0 \tag{7.13}$$

□

Teorema 7.6 (Serie armonica)**.** *La serie armonica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *è divergente.*

Dimostrazione. Consideriamo le somme parziali:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \tag{7.14}$$
$$S_{2^m} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^m} \tag{7.15}$$

Raggruppiamo i termini:

$$S_{2^m} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots \tag{7.16}$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2^3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^m}\right) \tag{7.17}$$

Per ogni gruppo $\left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right)$ con $k \geq 2$, abbiamo 2^{k-1} termini, ciascuno maggiore o uguale a $\frac{1}{2^k}$. Quindi:

$$\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^k} \geq 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} \tag{7.18}$$
$$= \frac{2^{k-1}}{2^k} \tag{7.19}$$
$$= \frac{1}{2} \tag{7.20}$$

Pertanto:

$$S_{2^m} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} \tag{7.21}$$
$$= 1 + (m-1) \cdot \frac{1}{2} \tag{7.22}$$
$$= 1 + \frac{m-1}{2} \tag{7.23}$$

Poiché $\lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{m-1}{2}\right) = \infty$, la serie armonica diverge. □

Teorema 7.7 (Criterio del confronto)**.** *Siano* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *due serie a termini non negativi.*

1. *Se* $0 \leq a_n \leq b_n$ *per ogni* n *sufficientemente grande e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *è convergente, allora anche* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *è convergente.*

2. *Se* $0 \leq b_n \leq a_n$ *per ogni* n *sufficientemente grande e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *è divergente, allora anche* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *è divergente.*

Teorema 7.8 (Criterio asintotico del confronto)**.** *Siano* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *due serie a termini positivi. Se esiste* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ *con* $0 < L < \infty$*, allora le due serie hanno lo stesso carattere, cioè o convergono entrambe o divergono entrambe.*

Teorema 7.9 (Criterio del rapporto)**.** *Sia* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie a termini positivi. Se esiste* $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$*, allora:*

1. *Se* $\rho < 1$*, la serie è convergente.*

2. *Se* $\rho > 1$ *o* $\rho = \infty$*, la serie è divergente.*

3. *Se* $\rho = 1$*, il criterio non è conclusivo.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\rho < 1$ e scegliamo q tale che $\rho < q < 1$. Per la definizione di limite, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$ si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$.

Da ciò segue che:

$$a_{n_0+1} < q \cdot a_{n_0} \tag{7.24}$$
$$a_{n_0+2} < q \cdot a_{n_0+1} < q^2 \cdot a_{n_0} \tag{7.25}$$
$$a_{n_0+3} < q \cdot a_{n_0+2} < q^3 \cdot a_{n_0} \tag{7.26}$$
$$\vdots \tag{7.27}$$

In generale, per ogni $k \geq 1$:

$$a_{n_0+k} < q^k \cdot a_{n_0} \tag{7.28}$$

Quindi:

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k} \tag{7.29}$$
$$< \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cdot a_{n_0} \tag{7.30}$$
$$= a_{n_0} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} q^k \tag{7.31}$$
$$= a_{n_0} \cdot \frac{q}{1-q} \tag{7.32}$$

Poiché la somma è finita, la serie $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$ è convergente, e quindi anche la serie originale $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente.

Il caso $\rho > 1$ si dimostra analogamente, osservando che se $\rho > 1$ allora a_n non tende a 0 per $n \to \infty$, il che viola la condizione necessaria per la convergenza. □

Teorema 7.10 (Criterio della radice)**.** *Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Se esiste $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, allora:*

1. *Se $\rho < 1$, la serie è convergente.*
2. *Se $\rho > 1$ o $\rho = \infty$, la serie è divergente.*
3. *Se $\rho = 1$, il criterio non è conclusivo.*

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella del criterio del rapporto. Se $\rho < 1$, scegliamo q tale che $\rho < q < 1$. Esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$ si ha $\sqrt[n]{a_n} < q$, cioè $a_n < q^n$.

Quindi:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n < \sum_{n=n_0}^{\infty} q^n \tag{7.33}$$
$$= q^{n_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k \tag{7.34}$$
$$= q^{n_0} \cdot \frac{1}{1-q} \tag{7.35}$$

Poiché la somma è finita, la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è convergente, e quindi anche la serie originale $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente.

Il caso $\rho > 1$ si dimostra analogamente, osservando che se $\rho > 1$ allora a_n non tende a 0 per $n \to \infty$. □

Teorema 7.11 (Criterio di Leibniz per le serie a segni alterni)**.** *Sia $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ una serie a segni alterni, con (a_n) successione di termini positivi. Se:*

1. *(a_n) è monotona decrescente, cioè $a_n \geq a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$*
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Allora la serie è convergente.

7.4 Convergenza assoluta

Definizione 7.12. *Una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *si dice assolutamente convergente se la serie dei valori assoluti* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *è convergente.*

Teorema 7.13. *Se una serie è assolutamente convergente, allora è anche convergente.*

Dimostrazione. Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie assolutamente convergente. Definiamo:

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\} \tag{7.36}$$

$$a_n^- = \max\{-a_n, 0\} \tag{7.37}$$

Allora $a_n = a_n^+ - a_n^-$ e $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$. Poiché $0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$ e $0 \leq a_n^- \leq |a_n|$, e $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ è convergente, per il criterio del confronto anche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ sono convergenti.

Quindi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) \tag{7.38}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \tag{7.39}$$

Poiché entrambe le serie a destra sono convergenti, anche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente. □

Capitolo 8

Calcolo integrale per funzioni di una variabile reale

8.1 Integrale di Cauchy-Riemann

Definizione 8.1. *Una partizione di un intervallo* $[a, b]$ *è un insieme finito di punti* $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *tali che* $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Definizione 8.2. *L'ampiezza di una partizione* $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *è il massimo tra le lunghezze dei sottointervalli:*

$$|P| = \max_{i=1,\ldots,n} (x_i - x_{i-1}) \tag{8.1}$$

Definizione 8.3. *Una partizione puntata di un intervallo* $[a, b]$ *è una coppia* (P, ξ) *dove* $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *è una partizione di* $[a, b]$ *e* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *è una* n*-upla di punti tali che* $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ *per ogni* $i = 1, \ldots, n$.

Definizione 8.4. *Data una funzione* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *e una partizione puntata* (P, ξ) *di* $[a, b]$*, la somma di Cauchy (o somma di Riemann) associata è:*

$$S(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \tag{8.2}$$

Definizione 8.5. *Una funzione* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *si dice integrabile secondo Cauchy-Riemann se esiste un numero* $I \in \mathbb{R}$ *tale che per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che per ogni partizione puntata* (P, ξ) *con* $|P| < \delta$ *si ha:*

$$|S(f, P, \xi) - I| < \varepsilon \tag{8.3}$$

Il numero I *si chiama integrale di* f *su* $[a, b]$ *e si indica con* $\int_a^b f(x)\,dx$.

8.2 Classi di funzioni integrabili

Teorema 8.6. *Ogni funzione continua* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *è integrabile secondo Cauchy-Riemann.*

Teorema 8.7. *Ogni funzione monotona* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *è integrabile secondo Cauchy-Riemann.*

Teorema 8.8. *Ogni funzione limitata* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *che è continua tranne che in un numero finito di punti è integrabile secondo Cauchy-Riemann.*

8.3 Proprietà dell'integrale

Teorema 8.9 (Linearità dell'integrale)**.** *Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili e sia $c \in \mathbb{R}$. Allora:*

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx \tag{8.4}$$

$$\int_a^b c \cdot f(x)\, dx = c \cdot \int_a^b f(x)\, dx \tag{8.5}$$

Teorema 8.10 (Additività rispetto all'intervallo)**.** *Sia $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile, con $a < b < c$. Allora f è integrabile anche sugli intervalli $[a, b]$ e $[b, c]$, e:*

$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx \tag{8.6}$$

Teorema 8.11 (Monotonia dell'integrale)**.** *Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili tali che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. Allora:*

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx \tag{8.7}$$

Teorema 8.12 (Integrabilità del modulo)**.** *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile, allora anche $|f| : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile.*

Teorema 8.13 (Teorema della media integrale)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esiste un punto $c \in [a, b]$ tale che:*

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c) \cdot (b - a) \tag{8.8}$$

Dimostrazione. Poiché f è continua su $[a, b]$, per il teorema di Weierstrass esistono $m, M \in \mathbb{R}$ tali che $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$, dove $m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$ e $M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$.

Per la monotonia dell'integrale:

$$m \cdot (b - a) = \int_a^b m\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b M\, dx = M \cdot (b - a) \tag{8.9}$$

Quindi:

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx \leq M \tag{8.10}$$

Poniamo $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$. Per il teorema dei valori intermedi, esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = \mu$, cioè:

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx \tag{8.11}$$

Da cui:

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c) \cdot (b - a) \tag{8.12}$$

□

8.4 Calcolo dell'integrale

Definizione 8.14. *Una funzione* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ *si dice primitiva di* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *se* F *è derivabile in* (a,b) *e* $F'(x) = f(x)$ *per ogni* $x \in (a,b)$.

Teorema 8.15. *Se* F_1 *e* F_2 *sono due primitive della stessa funzione* f *su un intervallo* $[a,b]$, *allora esiste una costante* $C \in \mathbb{R}$ *tale che* $F_2(x) = F_1(x) + C$ *per ogni* $x \in [a,b]$.

Dimostrazione. Sia $\varphi(x) = F_2(x) - F_1(x)$. Allora $\varphi'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0$ per ogni $x \in (a,b)$.

Per il teorema di Lagrange, se $x_1, x_2 \in [a,b]$ con $x_1 < x_2$, esiste $c \in (x_1, x_2)$ tale che:

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = \varphi'(c) \cdot (x_2 - x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1) = 0 \tag{8.13}$$

Quindi $\varphi(x_2) = \varphi(x_1)$ per ogni $x_1, x_2 \in [a,b]$, il che significa che φ è costante su $[a,b]$, cioè esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che $\varphi(x) = C$ per ogni $x \in [a,b]$.

Pertanto, $F_2(x) = F_1(x) + C$ per ogni $x \in [a,b]$. □

Teorema 8.16 (Teorema fondamentale del calcolo - Prima forma)**.** *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua e sia* F *una sua primitiva. Allora:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{8.14}$$

Dimostrazione. Sia $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partizione di $[a,b]$ con $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Per il teorema della media integrale, per ogni $i = 1, \ldots, n$ esiste $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tale che:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \tag{8.15}$$

Quindi:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \tag{8.16}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \tag{8.17}$$

D'altra parte, per il teorema di Lagrange, per ogni $i = 1, \ldots, n$ esiste $\eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tale che:

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\eta_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f(\eta_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \tag{8.18}$$

Sommando su tutti gli intervalli:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] \tag{8.19}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \tag{8.20}$$

Poiché f è continua, per $|P| \to 0$ si ha:

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \tag{8.21}$$

Quindi:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{8.22}$$

□

Definizione 8.17 (Funzione integrale). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. La funzione integrale di f è la funzione $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da:*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \tag{8.23}$$

Teorema 8.18 (Teorema fondamentale del calcolo - Seconda forma). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia F la sua funzione integrale. Allora F è derivabile in (a, b) e $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in (a, b)$.*

8.5 Metodi di integrazione

Teorema 8.19 (Integrazione per parti). *Siano $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili con derivate continue. Allora:*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\, dx \tag{8.24}$$

dove $[u(x)v(x)]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Teorema 8.20 (Integrazione per sostituzione). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ una funzione derivabile con derivata continua, tale che $\varphi(\alpha) = a$ e $\varphi(\beta) = b$. Allora:*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt \tag{8.25}$$

8.6 Integrali generalizzati

Definizione 8.21. *Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile, cioè integrabile su ogni intervallo $[a, c]$ con $c > a$. Si definisce l'integrale improprio di prima specie di f come:*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\, dx \tag{8.26}$$

se tale limite esiste finito.

Definizione 8.22. *Sia $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile, cioè integrabile su ogni intervallo $[c, b]$ con $c > a$. Si definisce l'integrale improprio di seconda specie di f come:*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\, dx \tag{8.27}$$

se tale limite esiste finito.

Definizione 8.23. *Un integrale improprio si dice assolutamente convergente se l'integrale improprio del valore assoluto della funzione è convergente.*

Teorema 8.24. *Se un integrale improprio è assolutamente convergente, allora è anche convergente.*

Teorema 8.25 (Integrabilità di $\frac{1}{t^\alpha}$). *Sia $\alpha > 0$. Allora:*

1. *L'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt$ converge se e solo se $\alpha > 1$.*
2. *L'integrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\, dt$ converge se e solo se $\alpha < 1$.*

Dimostrazione. Per il primo punto, calcoliamo:

$$\int_1^c \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \int_1^c t^{-\alpha}\,dt \tag{8.28}$$

$$= \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^c \tag{8.29}$$

$$= \frac{c^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1} \tag{8.30}$$

$$= \frac{1-c^{-\alpha+1}}{\alpha-1} \tag{8.31}$$

Se $\alpha > 1$, allora $-\alpha+1 < 0$ e $\lim_{c\to+\infty} c^{-\alpha+1} = 0$. Quindi:

$$\lim_{c\to+\infty}\int_1^c \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \frac{1}{\alpha-1} \tag{8.32}$$

Se $\alpha \leq 1$, allora $-\alpha+1 \geq 0$ e $\lim_{c\to+\infty} c^{-\alpha+1} = +\infty$ (se $\alpha < 1$) o $\lim_{c\to+\infty} c^{-\alpha+1} = 1$ (se $\alpha = 1$). In entrambi i casi, l'integrale diverge.

La dimostrazione del secondo punto è analoga. $\square$

Teorema 8.26 (Criterio del confronto per integrali impropri)**.** *Siano $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \geq a$.*

1. *Se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, allora anche $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.*
2. *Se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge, allora anche $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge.*

Teorema 8.27 (Criterio asintotico del confronto per integrali impropri)**.** *Siano $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che $f(x), g(x) > 0$ per ogni $x \geq a$. Se esiste $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ con $0 < L < +\infty$, allora gli integrali $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ hanno lo stesso carattere, cioè o convergono entrambi o divergono entrambi.*

Teorema 8.28 (Criterio integrale per le serie)**.** *Sia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua e decrescente tale che $f(n) = a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ hanno lo stesso carattere, cioè o convergono entrambi o divergono entrambi.*

Capitolo 9

Equazioni differenziali del primo ordine

9.1 Introduzione

Definizione 9.1. *Un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine è un'equazione del tipo:*

$$y' = f(x, y) \tag{9.1}$$

dove $f : D \to \mathbb{R}$ è una funzione definita su un dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Definizione 9.2. *Una soluzione dell'equazione differenziale $y' = f(x, y)$ su un intervallo I è una funzione derivabile $\varphi : I \to \mathbb{R}$ tale che:*

1. *Per ogni $x \in I$, il punto $(x, \varphi(x))$ appartiene al dominio D di f.*
2. *Per ogni $x \in I$, si ha $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$.*

Definizione 9.3. *Si chiama problema di Cauchy il problema di trovare una soluzione $\varphi : I \to \mathbb{R}$ dell'equazione differenziale $y' = f(x, y)$ che soddisfi la condizione iniziale $\varphi(x_0) = y_0$, dove $(x_0, y_0) \in D$ è un punto fissato.*

9.2 Equazioni a variabili separabili

Definizione 9.4. *Un'equazione differenziale del tipo:*

$$y' = g(x) \cdot h(y) \tag{9.2}$$

dove $g : I \to \mathbb{R}$ e $h : J \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue, si dice a variabili separabili.

Teorema 9.5. *Le soluzioni di un'equazione a variabili separabili $y' = g(x) \cdot h(y)$ sono:*

1. *Le funzioni costanti $y(x) \equiv c$ dove c è tale che $h(c) = 0$.*
2. *Le funzioni $\varphi : I \to \mathbb{R}$ che soddisfano:*

$$\int \frac{1}{h(y)}\, dy = \int g(x)\, dx + C \tag{9.3}$$

   dove C è una costante arbitraria.

9.3 Equazioni lineari del primo ordine

Definizione 9.6. *Un'equazione differenziale del tipo:*

$$y' + a(x) \cdot y = b(x) \tag{9.4}$$

dove $a, b : I \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue, si dice lineare del primo ordine.

Teorema 9.7. *Le soluzioni dell'equazione lineare del primo ordine $y' + a(x) \cdot y = b(x)$ sono le funzioni:*

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(\int b(x)e^{A(x)}\, dx + C \right) \tag{9.5}$$

dove $A(x) = \int a(x)\, dx$ è una primitiva di $a(x)$ e C è una costante arbitraria.

9.4 Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Definizione 9.8. *Un'equazione differenziale del tipo:*

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{9.6}$$

dove $a, b, c \in \mathbb{R}$ sono costanti con $a \neq 0$, si dice lineare del secondo ordine a coefficienti costanti omogenea.

Teorema 9.9. *Le soluzioni dell'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti omogenea $ay'' + by' + cy = 0$ dipendono dalle radici del polinomio caratteristico $P(r) = ar^2 + br + c$:*

1. *Se $P(r)$ ha due radici reali e distinte $r_1 \neq r_2$, le soluzioni sono:*

   $$y(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} \tag{9.7}$$

   dove $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie.

2. *Se $P(r)$ ha una radice reale doppia $r_1 = r_2 = r$, le soluzioni sono:*

   $$y(x) = (C_1 + C_2x)e^{rx} \tag{9.8}$$

   dove $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie.

3. *Se $P(r)$ ha due radici complesse coniugate $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ con $\beta \neq 0$, le soluzioni sono:*

   $$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)) \tag{9.9}$$

   dove $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie.

Capitolo 10

Cenni su alcune generalizzazioni dell'Analisi

10.1 Calcolo differenziale in più variabili

Definizione 10.1. *Lo spazio $\mathbb{R}^n$ è l'insieme delle n-uple ordinate di numeri reali:*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ per ogni } i = 1, 2, \ldots, n\} \tag{10.1}$$

Definizione 10.2. *La norma euclidea di un vettore $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ è:*

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \tag{10.2}$$

Definizione 10.3. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in A$. Si dice che f ha limite $L \in \mathbb{R}$ per x che tende a x_0, e si scrive:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \tag{10.3}$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in A$ con $0 < \|x - x_0\| < \delta$ si ha $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Definizione 10.4. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in A$. Si dice che f è continua in x_0 se:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{10.4}$$

Definizione 10.5. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n) \in A$. La derivata parziale di f rispetto alla i-esima variabile nel punto x_0, indicata con $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$, è il limite (se esiste):*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0^1, \ldots, x_0^{i-1}, x_0^i + h, x_0^{i+1}, \ldots, x_0^n) - f(x_0)}{h} \tag{10.5}$$

Definizione 10.6. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Il gradiente di f nel punto $x_0 \in A$, indicato con $\nabla f(x_0)$, è il vettore delle derivate parziali:*

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) \tag{10.6}$$